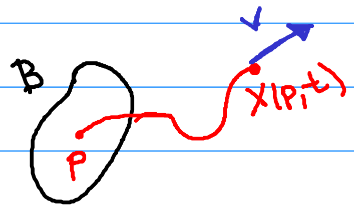
Problema



Sea $B \subset \mathbb{R}^2$ como el dibujo y sea

$X : B \times [0,\infty) \to \mathbb{R}^2$ un movimiento de del cuerpo B.

$p \in B \qquad X(p,t)$

Pedimos que X sea difeomorfismo, la inversa $p(x,t)$

Definimos el campo de velocidades

$$V(x,t) = \dot{X}(p(x,t),t)$$

Sea $B_t = X(B,t)$ y $g(t) = Vol(B_t)$, encontrar $\dot{g}$

$$g(t) = Vol(B_t) \underset{\text{Calc III}}{=} \int_{B_t} 1\, dx \underset{+\text{ calc III}}{=} \int_B \det D_p X \, dp$$

$$\dot{g}(t) = \int_B \frac{d}{dt}\left(\det D_p X\right) dp$$

OUCH!!!

Si $F(x,y,t) = \begin{bmatrix} F^1(x,y,t) \\ F^2(x,y,t) \end{bmatrix}$ $DF(x,y,t) = \begin{bmatrix} F^1_x(x,y,t) & F^1_y(x,y,t) \\ F^2_x(x,y,t) & F^2_y(x,y,t) \end{bmatrix}$

$$\det DF(\cdot) = F^1_x F^2_y - F^1_y F^2_x$$

$$\frac{d}{dt} \det DF = \left(\dot{F}^1_x F^2_y + F^1_x \dot{F}^2_y \right) - \left(\dot{F}^1_y F^2_x + F^1_y \dot{F}^2_x \right)$$

Que es la derivada?

Aproximaciones lineales locales de funciones

- Funciones $f: A \to B$

- Lineales: suma y mult. por escalar ($\mathbb{R}$)

$$L[V+W] = L(V) + L(W)$$
$$L(\alpha V) = \alpha L(V)$$

- local: Para cada $X \in A$ cerca de X

$$f(X+V) \approx f(X) + L(X)[V]$$

$f(X+V)$ esta cerca de $f(X)+L(X)[V]$ si V es chico.

Pensemos en un ejemplo concreto

- $\mathcal{E}$ el espacio euclideo 3 dimensional de los puntos

Claim: $\mathcal{E}$ es mucho mas concreto que $\mathbb{R}^3$ (Quien puso un dedo en una terna de numeros reales?)

- Sea V el espacio de las flechas asociado a $\mathcal{E}$
  (llamemoslo espacio vectorial solo porque vector = flecha)

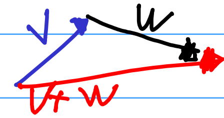
Claim: V es mas concreto que $\mathbb{R}^3$. Las flechas se hacen sentir en $\mathcal{E}$.

Que es V? Tratar de describir por sus propiedades.

$p + v = q \in \mathcal{E}$

$p \in \mathcal{E}$

$v \in V$ entonces



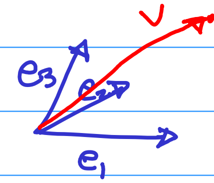
- punto + flecha = punto
- punto − punto = flecha
- flecha + flecha = flecha
- escalar flecha = flecha

Ademas de estas operaciones las flechas gozan de de magnitud y dirección.

Una definición a través de las propiedas del espacio de flechas → espacios vectoriales ó lineales

- suma
- producto por un escalar

En V, podemos encontrar 3 flechas (no el mismo plano) tal que $v \in V$ se puede escribir de manera única como $v = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$



• <u>Dimensión</u> del espacio y existencia de <u>base</u>

No olvidemos la magnitud y dirección (ángulo) de las flechas.

V tiene un producto escalar y un producto cruz

$u \cdot v = |u||v| \cos\alpha$

$u \times v$ es perpendicular a u y v y $|u \times v| = |u||v| \operatorname{sen}\alpha$

Funciones lineales

Si V y W son espacios como el de las flechas

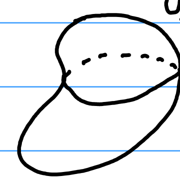
$L : V \to W$ lineal $\quad L[\alpha v + w] = \alpha L[v] + L[w]$

$L \in Lin(V; W)$

Volvemos a las funciones que queremos aprox loc. por funciones lineales.

Sea $\mathcal{B}$ un cuerpo, $\mathcal{B} \subset \mathcal{E}$

y $\varphi : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ la temperatura del cuerpo.



Que φ sea diferenciable quiere decir que

para cada $p \in \mathcal{B}$ y $v \in V$ pequeño

$$\varphi(p+v) \approx \varphi(p) + L_p[v] \quad \text{donde } L_p \in Lin(V; \mathbb{R})$$

$L(p)[v]$

v pequeño significa $\|v\|$ es pequeño

Aproximación $\approx$ significa

$$\varphi(p+v) - (\varphi(p) + L(p)[v]) = r(p,v)$$

$$\underbrace{\frac{|r(p,v)|}{|v|} \to 0 \quad \text{cuando} \quad |v| \to 0}$$

límite en espacio que los flechas tienen magnitud

llamamos $r(p,v) = o(v)$

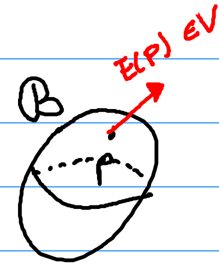
Se puede ver que si $L(p)$ existe es único $D\varphi(p) \in Lin(V;\mathbb{R})$

Podemos generalizar a los siguientes casos:

- Campo eléctrico estacionario

$E : \mathcal{B} \subset \mathcal{E} \to V$

$$E(p+v) = E(p) + DE(p)[v] + o(v)$$

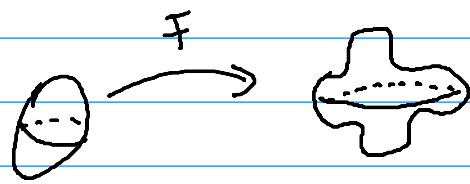


donde $DE(p) \in \mathrm{Lin}(V,V)$

y $o : V \to V$ tal que $\lim\limits_{v \to \infty} \dfrac{|o(v)|}{|v|} = 0$

- Deformación

$F : \mathcal{B} \subset \mathcal{E} \to \mathcal{E}$



$$F(p+v) = F(p) + DF(p)[v] + o(v)$$

$$DF(p) \in \mathrm{Lin}(V,V)$$

$$o : V \to V$$

- V, W espacios vectoriales Normados → tamaño de los flechos

(límites en espacios normados)

$T : V \to W$

$$T(v+u) = T(v) + DT(v)[u] + o(u)$$

$DT(v) \in \mathrm{Lin}(V, W)$ $\qquad \lim \dfrac{\|o(u)\|}{|u|} = 0$

$o : V \to W$

Ejemplo: Sea la función long. cuadrada de una flecha

$\varphi : V \to \mathbb{R} \qquad \varphi(u) = u \cdot u$

$\varphi(u+v) = (u+v)\cdot(u+v) = \varphi(u) + 2\, u\cdot v + v\cdot v$

$2u\cdot v \in \operatorname{Lin}(V, \mathbb{R})$

$\sigma(v) = v\cdot v \qquad \dfrac{|\sigma(v)|}{|v|} = \dfrac{|v|^2}{|v|} = |v|$

entonces $D\varphi(u) = 2u\,\cdot$

Nos alcanza para obtener prop. muy útiles:

Regla de la cadena

$$D(f\circ g)(x)[u] = Df(g(x))\left[Dg(x)[u]\right]$$

Regla del producto

$$h(x) = \Pi(f(x), g(x))$$

$$Dh(x)[u] = \Pi(Df(x)[u], g(x)) + \Pi(f(x), Dg(x)[u])$$

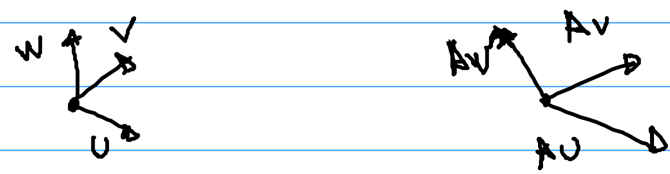
Funciones lineales / tensores

$\mathrm{Lin}(V, \mathbb{R})$
$\mathrm{Lin}(V, V) = \mathrm{Lin}(V)$

- ¿Cuantas serán? ¿Que forma tendrán?

- **Observación:** Conociendo l en una base de V $\{e_1, e_2, e_3\}$ l esta completamente determinada.

Detengamonos en $A \in L(V)$, ver gráficamente como una deformacion de pp en pp.



Estudiemos por un momento los p.p.

Sea $u, v, w \in V$ linealmente independientes

$\mathcal{P}(u,v,w)$ el pp, es sencillo ver que

$$\text{Vol } \mathcal{P} = |(u \times v) \cdot w| = |[u,v,w]|$$

Ahora tenemos $[\,]: V \times V \times V \to \mathbb{R}$

- es lineal en cada argumento
- si intercambio dos de ellos cambia de signo
- cualquier permutacion, no cambia el valor absoluto

Las derivadas estan asociadas a las funciones multilineales

V un espacio vectorial

$\mathcal{T}^{(1)} = \{ l : V \to \mathbb{R} \text{ lineales} \}$

$\mathcal{T}^{(2)} = \{ l : V \times V \to \mathbb{R} \text{ multil.} \}$

$\mathcal{T}^{(3)} = \{ l : V \times V \times V \to \mathbb{R} \text{ ''} \}$

Observaciones

- $[\,] \in \mathcal{T}^{(3)}(V)$
- $\mathcal{T}^{(k)}(V)$ es un espacio vectorial
- $\mathcal{T}^{(k)}(V)$ tiene dimension finita

- $l \in \mathcal{T}^{(k)}(V)$ queda determinada si conocemos sus valores en $\{e_1, .., e_3\}$

<u>Ejemplos</u>

- $l \in \mathcal{T}^{(1)}(V)$, si conozco $l(e_1)$, $l(e_2)$ y $l(e_3)$ conozco l por tanto $\mathcal{T}^{(1)}(V)$ tiene 3 grados de libertad, es decir $\dim \mathcal{T}^{(1)}(V) = 3$

- $\mathcal{T}^2(V)$ $\quad l(e_1, e_1) \quad l(e_2, e_1)$
  $l(e_1, e_2) \quad l($ $\qquad 3 \times 3$
  $l(e_1, e_3)$

- $\mathcal{T}^3(V)$ $\qquad 3 \times 3 \times 3 = 27$

Volvemos a $[\ ] \in \mathcal{T}^{(3)}(V)$

$\Lambda = \{ l \in \mathcal{T}^{(3)}(V) : \text{permutar argumentos cambia el signo} \}$

- Λ es un subespacio vectorial de $\mathcal{T}^{(3)}(V)$
  ¿Que dimension tiene?

- Si 2 se repiten $l(e_i, e_j, e_k) = 0$
  por lo tanto estos no son grados de libertad

$\to$ los unicos grados de libertad que pueden son cuando los 3 argumentos son distintos, sin embargo si conocemos $l(e_1, e_2, e_3)$, l en cualquier permutación

$\Rightarrow$ hay solo un grado de libertad $\Rightarrow \dim \Lambda = 1$

Sea $\omega(u,v,w) = [u,v,w]$ como $\omega \in \Lambda$ $(\omega \neq 0)$
$\Rightarrow$ si $l \in \Lambda$ se tiene que $\exists ! \alpha \in \mathbb{R}$ tal que
$l = \alpha \omega$

Volvemos a $L(V)$, sea $A \in L(V)$ y definimos
$\ell(u,v,w) = \omega(Au, Av, Aw)$
se tiene que $\ell \in \Lambda \Rightarrow \exists\, \alpha_A$ tal que

$$\ell(u,v,w) = \alpha_A\, \omega(u,v,w)$$

Si u, v y w son l.i. $\Rightarrow$

$$\alpha_A = \frac{(Au \times Av) \cdot Aw}{(u \times v) \cdot w}$$

Observación: α_A no depende de la selección de u, v y w.

llamemos a $\alpha_A = \det A$

Podemos cosechar el esfuerzo sembrado

Propiedad 1

$$|\det A| = \frac{\mathrm{Vol}\, \mathcal{P}(Au, Av, Aw)}{\mathrm{Vol}\, \mathcal{P}(u, v, w)}$$

Propiedad 2 $\quad A \in L(V) \quad \tilde{A}: \mathcal{E} \to \mathcal{E}$

$\tilde{A}(p) = A(p-o) \Rightarrow$ si B es medible (Teoría razonable)

$$m(\tilde{A}(B)) = |\det A| \, m(B)$$

Volvamos a $L(V)$, es un espacio vectorial y además AB la composición $\in L(V)$

3) P $\quad$ e_1, e_2, e_3 ON

$$\det AB = [ABe_1, ABe_2, ABe_3] = \frac{[Au_1, Au_2, Au_3]}{[u_1, u_2, u_3]} \times \frac{[u_1, u_2, u_3]}{[e_1, e_2, e_3]}$$

$$= \det A \det B.$$

4) P $\quad \det A = [Ae_1, Ae_2, Ae_3]$ $\to$ intercambiar columnas

$\to$ multiplicar columnas por escalar

manifestaciones triviales

Volvemos a $L(V)$

$L(V)$ es y podemos definirle tamaño $a \in L(V)$

$$|A| = \max_{|v|=1} |Av|$$

(*) Antes se podría haber trabajado en
- base de $L(V)$
- teorema descomposición polar

Propiedad: $|Av| \leq |A||v|$

Ahora definimos

$\varphi : L(V) \longrightarrow \mathbb{R}$

$\varphi(A) = \det A$; Sea $U \in L(V)$

$\varphi(A+U) = \det(A+U)$

$\det(I+U) = (I+U)e_1 \times (I+U)e_2 \cdot (I+U)e_3$

$= \underbrace{[e_1, e_2, e_3]}_{=1} +$ lineal en U, indep. de e_1, e_2, e_3

$\ell(U) \leftarrow [e_1, Ue_2, e_3] + [Ue_1, e_2, e_3] + [e_1, e_2, Ue_3] +$

$q(U) \leftarrow [Ue_1, Ue_2, e_3] + [e_1, Ue_2, Ue_3] + [Ue_1, e_2, Ue_3] +$

$\underbrace{[Ue_1, Ue_2, Ue_3]}_{\det U}$

Resumiendo:

$$\det(I+U) = 1 + l(U) + q(U) + \det(U)$$

- $|\det U| \leq |Ue_1||Ue_2||Ue_3| \leq |U|^3$
- $|q(U)| \leq 3|U|^2$

$$\Rightarrow D\det(I)[U] = \operatorname{tr} U$$

$$\det(A+U) = \det(A(I+A^{-1}U)) =$$

$$= \det A \det(I+A^{-1}U) =$$

$$= \det A \left(1 + \operatorname{tr}(A^{-1}U) + h.o.t\right)$$

$$\Rightarrow D\det(A)[U] = 1 + \operatorname{tr}(A^{-1}U)$$

Volvamos al problema inicial

$\mathcal{B} \subset \mathcal{E}$ un cuerpo en el espacio euclideo

$X : \mathcal{B} \times [0,\infty)$ un movimiento de $\mathcal{B}$

$$\mathrm{Vol}(\mathcal{B}_t) = \int_{\mathcal{B}_t} 1 \, dp = \int_{\mathcal{B}} \det D_p X(p,t) \, dp$$

$$\frac{d}{dt} \mathrm{Vol}(\mathcal{B}_t) = \int_{\mathcal{B}} \frac{d}{dt}\left(\det D_p X\right) dp$$

$$= \int_{\mathcal{B}} D\det(D_p X)\left[\frac{d}{dt} D_p X\right] dp$$

Ahora $\dfrac{d}{dt} D_p X = D_p \dot{X}$

$$D\det(D_p X)[D_p \dot{X}] = \det DX \, \mathrm{tr}\left(D_p \dot{X} \, D_p X^{-1}\right)$$

$$= \int_{\mathcal{B}} \mathrm{tr}\left(D_p V(X(p,t),t) \, D_p X^{-1}\right) \det DX$$

pero $D_p V = D_x V \, D_p X$

$$= \int_B tr\left(D_x V(X(p,t),t)\, \underbrace{D_p X \, D_p X^{-1}}_{=I}\right) \det DX =$$

$$= \int_{B_t} tr(DV)\, dx = \int_{B_t} \operatorname{div} V$$